



ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ
И АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

10 класс



ИЗДАТЕЛЬСТВО

БИНОМ

Таблица истинности



Таблицу значений, которые принимает логическое выражение при всех сочетаниях значений (наборах) входящих в него переменных, называют **таблицей истинности логического выражения**.

Таблицы истинности логических операций

A	\bar{A}	A	B	$A \& B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \oplus B$	$A \leftrightarrow B$
0	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0
		1	0	0	1	0	1	0
		1	1	1	1	1	0	1



Функцию от n переменных, аргументы которой и сама функция принимают только два значения – 0 и 1, называют **логической функцией**.

Таблица истинности может рассматриваться как способ задания логической функции.

Построение таблиц истинности

Определить количество строк таблицы $m = 2^n$, где n - количество переменных в логическом выражении

Определить число столбцов таблицы - сумма количества логических переменных и операций в выражении

Установить последовательность выполнения логических операций с учётом скобок и приоритетов операций

Заполнить строку с заголовками столбцов таблицы истинности (имена переменных, номера операций)

Выписать наборы входных переменных (ряд целых n -разрядных двоичных чисел от 0 до $2^n - 1$)

Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции

Пример построения таблицы истинности

Построим таблицу истинности для логического выражения

$$A \& B \vee \bar{A} \& \bar{B}$$

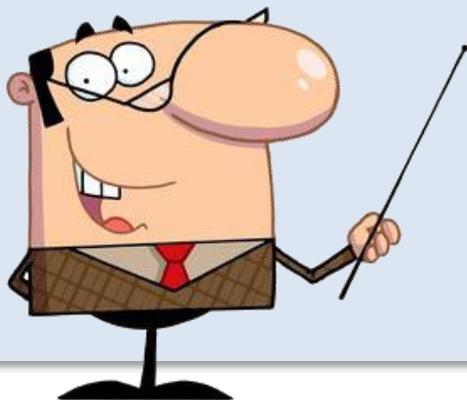
Сколько строк будет в таблице?

В этом выражении две переменные – A и B .

В таблице будет 5 строк (2^2 плюс строка заголовка).

Сколько столбцов будет в таблице?

В логическом выражении две логические переменные и пять логических операций. Итого 7 столбцов.

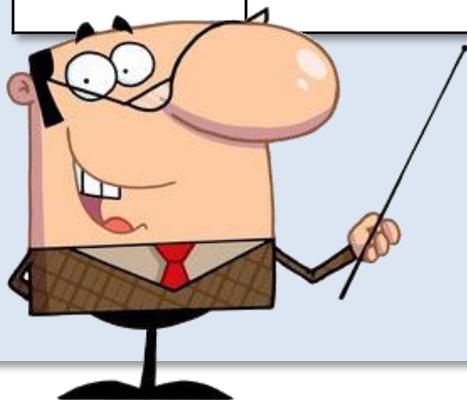


Строим таблицу из 5 строк и 7 столбцов.

Пример построения таблицы истинности

Построим таблицу истинности для логического выражения

$$A \& B \vee \bar{A} \& \bar{B}$$

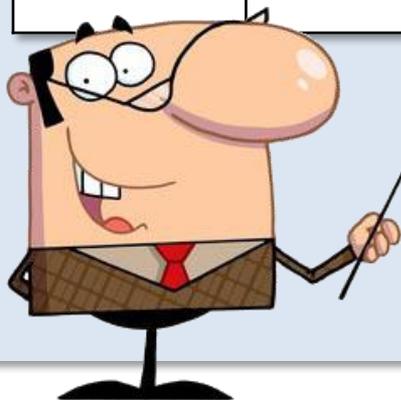


Строим таблицу из 5 строк и 7 столбцов.

Пример построения таблицы истинности

Построим таблицу истинности для логического выражения

$$A \& B \vee \bar{A} \& \bar{B}$$



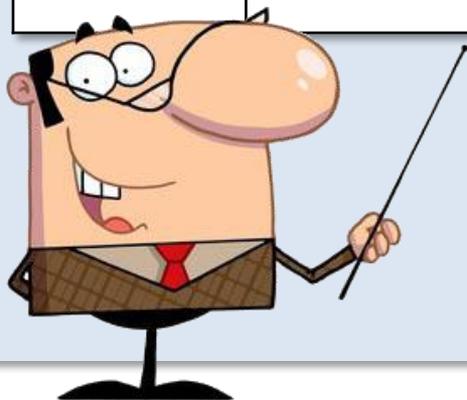
Заполним заголовки таблицы с учётом приоритета логических операций (порядок выполнения операций: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция).

Пример построения таблицы истинности

Построим таблицу истинности для логического выражения

$$\begin{array}{cccccc} \boxed{3} & \boxed{5} & \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{2} & \\ A & \& B & \vee & \bar{A} & \& \bar{B} \end{array}$$

A	B	1	2	3	4	5



Заполним наборы входных переменных с учётом того, что они представляют собой ряд целых двухразрядных двоичных чисел от 0 до 1.

Пример построения таблицы истинности

Построим таблицу истинности для логического выражения

$$A \& B \vee \bar{A} \& \bar{B}$$

A	B	1	2	3	4	5
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					



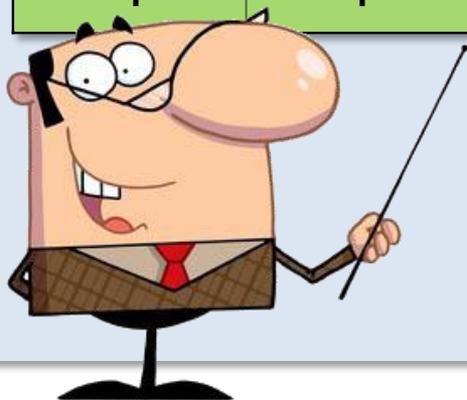
Заполним столбцы таблицы согласно правилам определения истинности логических операций.

Пример построения таблицы истинности

Построим таблицу истинности для логического выражения

$$\begin{array}{c} \boxed{3} \quad \boxed{5} \quad \boxed{1} \quad \boxed{4} \quad \boxed{2} \\ A \& B \vee \bar{A} \& \bar{B} \end{array}$$

A	B	1	2	3	4	5
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1



Обратите внимание на последний столбец, содержащий конечный результат. Какой из рассмотренных логических операций он соответствует?

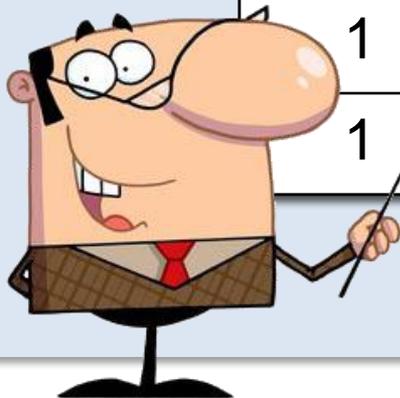
Эквивалентные выражения



Логические выражения, зависящие от одних и тех же логических переменных, называются **равносильными** или **эквивалентными**, если для всех наборов входящих в них переменных значения выражений в таблицах истинности совпадают.



A	B	$A \rightarrow B$	$\bar{A} \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1



С помощью таблиц истинности докажите равносильность выражений $A \rightarrow B$ и $\bar{A} \vee B$.



Анализ таблиц истинности

№ 1. Известен фрагмент таблицы истинности для логической функции $F(A, B, C)$. Сколько из приведённых ниже логических выражений соответствуют этому фрагменту?

- а) $(A \vee C) \& B$
- б) $(A \vee B) \& (C \rightarrow A)$
- в) $(A \& B \vee C) \& (B \rightarrow A \& C)$
- г) $(A \rightarrow B) \vee (C \vee A \rightarrow B)$

A	B	C	F
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



Ответить на поставленный вопрос можно, вычислив значение каждого логического выражения на заданном наборе переменных и сравнив его с имеющимся значением F .
Вычисления будем производить построчно.

Анализ таблиц истинности



№ 1. Известен фрагмент таблицы истинности для логической функции $F(A, B, C)$. Сколько из приведённых ниже логических выражений соответствуют этому фрагменту?

а) $(A \vee C) \& B$ ✓

б) $(A \vee B) \& (C \rightarrow A)$

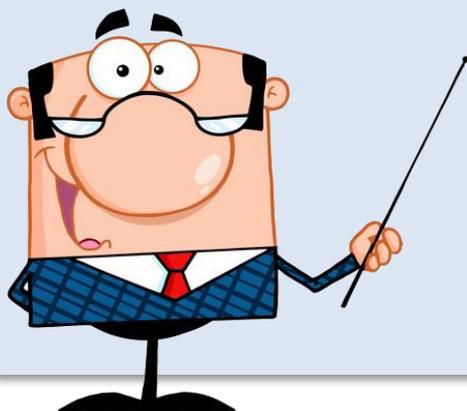
в) $(A \& B \vee C) \& (B \rightarrow A \& C)$

г) $(A \rightarrow B) \vee (C \vee A \rightarrow B)$

A	B	C	F
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

а) $(A \vee C) \& B$

A	B	C	1	2	F
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1



Анализ таблиц истинности



№ 1. Известен фрагмент таблицы истинности для логической функции $F(A, B, C)$. Сколько из приведённых ниже логических выражений соответствуют этому фрагменту?

а) $(A \vee C) \& B$

б) $(A \vee B) \& (C \rightarrow A)$ ❌

в) $(A \& B \vee C) \& (B \rightarrow A \& C)$

г) $(A \rightarrow B) \vee (C \vee A \rightarrow B)$

A	B	C	F
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

1 3 2
б) $(A \vee B) \wedge (C \rightarrow A)$

A	B	C	1	2	3	F
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0				1
1	1	1				1



Анализ таблиц истинности



№ 1. Известен фрагмент таблицы истинности для логической функции $F(A, B, C)$. Сколько из приведённых ниже логических выражений соответствуют этому фрагменту?

а) $(A \vee C) \& B$

б) $(A \vee B) \& (C \rightarrow A)$

в) $(A \& B \vee C) \& (B \rightarrow A \& C)$ **X**

г) $(A \rightarrow B) \vee (C \vee A \rightarrow B)$

A	B	C	F
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

в) $(A \wedge B \vee C) \wedge (B \rightarrow A \wedge C)$

A	B	C	1	2	3	4	5	F
1	0	1	0	1	1	1	1	0
1	1	0						1
1	1	1						1



Анализ таблиц истинности



№ 1. Известен фрагмент таблицы истинности для логической функции $F(A, B, C)$. Сколько из приведённых ниже логических выражений соответствуют этому фрагменту?

а) $(A \vee C) \& B$

б) $(A \vee B) \& (C \rightarrow A)$

в) $(A \& B \vee C) \& (B \rightarrow A \& C)$

г) $(A \rightarrow B) \vee (C \vee A \rightarrow B)$ ✓

A	B	C	F
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

г) $(A \rightarrow B) \vee (C \vee A \rightarrow B)$

A	B	C	1	2	3	4	F
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1





Анализ таблиц истинности

№ 1. Известен фрагмент таблицы истинности для логической функции $F(A, B, C)$. Сколько из приведённых ниже логических выражений соответствуют этому фрагменту?

A	B	C	F
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

- а) $(A \vee C) \& B$ ✓
б) $(A \vee B) \& (C \rightarrow A)$ ✗
в) $(A \& B \vee C) \& (B \rightarrow A \& C)$ ✗
г) $(A \rightarrow B) \vee (C \vee A \rightarrow B)$ ✓

Ответ: 2 (а, г)



Анализ таблиц истинности



№ 2. Дана логическая функция:

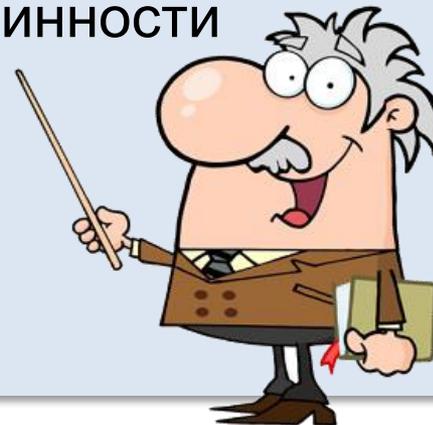
$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y).$$

Справа приведён фрагмент таблицы истинности, содержащий все наборы переменных, на которых F истинна. Определите, какому столбцу таблицы соответствует каждая из переменных.

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Существуют разные подходы к решению подобных задач:

- А) построение полной таблицы истинности
- Б) методом рассуждений



Анализ таблиц истинности



№ 2. Вариант А

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y)$$

Решение:

Сколько строк в полной таблице истинности для данной функции?

Данная функция зависит от 3 логических переменных. Полная таблица истинности для нее должна состоять из 8 (2^3) строк.

При остальных наборах переменных x, y, z функция $F(x, y, z) = 0$

Наборы переменных, на которых функция ложна - 001, 101 и 110.

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1
0	0	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0



Анализ таблиц истинности



№ 2. Вариант А

Решение:

Выясним, при каких значениях x , y , z функция $F(x, y, z) = 0$.

Конъюнкция & («и») ложна, если хотя бы один из операндов равен нулю.

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y) = 0$$

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1
0	0	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0



Анализ таблиц истинности



№ 2. Вариант А

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y)$$

Решение:

Выясним, при каких значениях x, y, z функция $F(x, y, z) = 0$.

Дизъюнкция \vee («или») ложна только в случае равенства нулю каждого из операндов, входящих в нее.

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1
0	0	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

	x	y	z	F
$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$	0	1	1	0
$(\bar{x} \vee y)$				0



Анализ таблиц истинности



№ 2. Вариант А

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y)$$

Решение:

Выясним, при каких значениях x , y , z функция $F(x, y, z) = 0$.

Дизъюнкция \vee («или») ложна только в случае равенства нулю каждого из операндов, входящих в нее.

Во второй скобке выражения $(\bar{x} \vee y)$ отсутствует переменная “ z ”, поэтому для неё будет 2 варианта, при $z = 0$ и $z = 1$.

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1
0	0	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0



Анализ таблиц истинности



№ 2. Вариант А

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y)$$

Решение:

Выясним, при каких значениях x, y, z функция $F(x, y, z) = 0$.

Дизъюнкция («или») ложна только в случае равенства нулю каждого из операндов, входящих в нее.

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1
0	0	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

	x	y	z	F
$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$	0	1	1	0
$(\bar{x} \vee y)$	1	0	0	0
	1	0	1	0



Анализ таблиц истинности



№ 2. Вариант А

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y)$$

Решение:

Сравним эту таблицу с восстановленным фрагментом исходной таблицы истинности.

Из трёх вариантов, значения только переменной «у» уникальны.

	x	y	z	F
$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$	0	1	1	0
$(\bar{x} \vee y)$	1	0	0	0
	1	0	1	0

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

0	0	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

Значит для переменной «у», в основной таблице, отводится второй столбец.



Анализ таблиц истинности



№ 2. Вариант А

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y)$$

Решение:

Сравним эту таблицу с восстановленным фрагментом исходной таблицы истинности.

При $y = 1$, x должен быть равен 0, а переменная $z = 1$.

	x	y	z	F
$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$	0	1	1	0
$(\bar{x} \vee y)$	1	0	0	0
	1	0	1	0

?	y	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

0	0	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

Значит для переменной «x», в основной таблице, отводится третий столбец, а для «z» - первый.



Анализ таблиц истинности



№ 2. Вариант А

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y)$$

Решение:

Сравним эту таблицу с восстановленным фрагментом исходной таблицы истинности.

При $y = 1$, x должен быть равен 0, а переменная $z = 1$.

	x	y	z	F
$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$	0	1	1	0
$(\bar{x} \vee y)$	1	0	0	0
	1	0	1	0

z	y	x	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

0	0	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

Значит для переменной «x», в основной таблице, отводится третий столбец, а для «z» - первый.



Ответ: z, y, x



Анализ таблиц истинности

№ 2. Вариант Б

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y)$$

Решение:

В данном примере два логических выражения связаны операцией «и».

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1



Анализ таблиц истинности

№ 2. Вариант Б

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y)$$

Решение:

В данном примере два логических выражения связаны операцией «и».

Конъюнкция («и») истинна тогда и только тогда, когда каждый из операндов, входящих в нее, равен истине.

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

$$F(x, y, z) = \underbrace{(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})}_{=1} \& \underbrace{(\bar{x} \vee y)}_{=1} = 1$$



Анализ таблиц истинности

№ 2. Вариант Б

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y) = 1$$

Решение:

Рассмотрим построчно варианты в таблице для меньшей из скобок $(\bar{x} \vee y)$.

$$(\bar{x} \vee y) = 1$$

0 или 1

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

По первой строке таблицы нельзя сделать выводы, т.к. в каком бы столбце на была переменная x , после инверсии она станет равной 1 и в итоге вторая скобка всегда будет = 1.



Анализ таблиц истинности

№ 2. Вариант Б

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y) = 1$$

Решение:

Рассмотрим построчно варианты в таблице для меньшей из скобок $(\bar{x} \vee y)$.

$$(\bar{x} \vee y) = 1$$

$$0 \text{ или } 1$$

По второй строке таблицы можно сделать вывод, что x не может быть во втором столбце, т.к. переменная x после инверсии станет равной 0 и в итоге вторая скобка будет = 0.

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1



Анализ таблиц истинности

№ 2. Вариант Б

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y) = 1$$

Решение:

Рассмотрим построчно варианты в таблице для меньшей из скобок $(\bar{x} \vee y)$.

$$(\bar{x} \vee y) = 1$$

0 или 1

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
1	1	1	1

x не может быть 2-й переменной

По второй строке таблицы можно сделать вывод, что X не может быть во втором столбце, т.к. переменная x после инверсии станет равной 0 и в итоге вторая скобка будет $= 0$.

- x не 2-я переменная



Анализ таблиц истинности

№ 2. Вариант Б

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y) = 1$$

Решение:

Рассмотрим построчно варианты в таблице для меньшей из скобок $(\bar{x} \vee y)$.

$$(\bar{x} \vee y) = 1$$

0 или 1

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

По третьей строке таблицы нельзя сделать каких-либо выводов.



Анализ таблиц истинности

№ 2. Вариант Б

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y) = 1$$

Решение:

Рассмотрим построчно варианты в таблице для меньшей из скобок $(\bar{x} \vee y)$.

$$(\bar{x} \vee y) = 1$$

$$0 \text{ или } 1$$

По четвёртой строке таблицы можно сделать вывод, что x не может быть в первом столбце, т.к. переменная x после инверсии станет равной 0 и в итоге вторая скобка будет $= 0$.

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1



Анализ таблиц истинности

№ 2. Вариант Б

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y) = 1$$

Решение:

Рассмотрим построчно варианты в таблице для меньшей из скобок $(\bar{x} \vee y)$.

$$(\bar{x} \vee y) = 1$$

0 или 1

По четвёртой строке таблицы можно сделать вывод, что x не может быть в первом столбце, т.е. переменная x после инверсии станет равной 0 и в итоге вторая скобка будет = 0.

Значит для x остаётся только третий столбец.

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1

x не может быть 1-й переменной



Анализ таблиц истинности

№ 2. Вариант Б

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y) = 1$$

Решение:

В данном примере два логических выражения связаны операцией «и».

?	?	x	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1

Конъюнкция («и») истинна тогда и только тогда, когда каждый из операндов входящих в нее, равен истине.

y – не может быть 1-й переменной

$$(\bar{x} \vee y) = 1$$

- x не 2-я переменная

0 или 1

- x не 1-я переменная

Тогда в строках, где $x = 1$ значение $y = 1$.



Анализ таблиц истинности

№ 2. Вариант Б

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y) = 1$$

Решение:

В данном примере два логических выражения связаны операцией «и».

Конъюнкция («и») истинна тогда и только тогда, когда каждый из операндов, входящих в нее, равен истине.

$$(\bar{x} \vee y) = 1$$

- x не 2-я переменная

0 или 1

- x не 1-я переменная

Тогда в строках, где $x = 1$ значение $y = 1$.

- y - 2-я переменная
- z - 1-я переменная

z	y	x	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Ответ: z, y, x



Самое главное

Таблицу значений, которые принимает логическое выражение при всех сочетаниях значений (наборах) входящих в него переменных, называют **таблицей истинности логического выражения**.

Истинность логического выражения можно доказать путём построения его таблицы истинности.

Функцию от n переменных, аргументы которой и сама функция принимают только два значения – 0 и 1 , называют **логической функцией**.

Таблица истинности может рассматриваться как способ задания логической функции.



Домашняя работа



№ 1. Проверьте правильность решения задания №2. Для этого составьте таблицу истинности.

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y).$$

z	y	x	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Домашняя работа



№ 1. Составлена таблица истинности для логического выражения, содержащего n переменных. Известно m — количество строк, в которых выражение принимает значение *истина*. Требуется выяснить, в скольких случаях логическое выражение примет значение *ложь* при следующих значениях n и m :

1) $n = 4, m = 9$

2) $n = 8, m = 156$

3) $n = 12, m = 1596$