Преобразование логических выражений.

Основные законы алгебры логики

Построение таблиц истинности усложняется при увеличении количества переменных в логических выражениях. Логические законы позволяют проводить упрощение сложных логических выражений.

1. Закон противоречия.

Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

$$A \& A = 0$$

2. Закон исключённого третьего.

Высказывание может быть истинным или ложным третьего не дано.

$$A \vee A = 1$$

3. Закон двойного отрицания.

Если дважды отрицать некоторое высказывание, то в результате получится исходное высказывание.

$$A = A$$

4. Законы де Моргана.

А) Общая инверсия двух логических слагаемых равносильна логическому умножению инвертированных переменных.

$$A \vee B = A \& B$$

Б) Общая инверсия двух логических множителей равносильна логической сумме инвертированных переменных.

$$A \& B = A \vee B$$

5. Переместительные (коммутативные) законы.

Можно менять местами логические переменные при операциях конъюнкции и дизъюнкции.

$$A \& B = B \& A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

6. Сочетательные (ассоциативные) законы.

*Если в логическом выражении используется **только** операция конъюнкции или дизъюнкции, то можно пренебрегать скобками или произвольно их расставлять.*

$$(A \& B) \& C= A \& (B \& C) = A \& B \& C$$

$$(A \vee B) \vee C= A \vee (B \vee C) = A \vee B \vee C$$

7. Распределительные (дистрибутивные) законы.

За скобки можно выносить как общие множители (обычная алгебра), так и общие слагаемые.

$$(A \& B) \vee (A \& C)=A \& (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \& (A \vee C)=A \vee (B \& C)$$

8. Законы равносильности (идемпотентности).

У результатов операций конъюнкции и дизъюнкции отсутствуют степени.

$$A \& A = A$$

$$A \vee A = A$$

9. Законы исключения констант.

$$A \& 0 = 0 \qquad A \& 1 = A$$

$$A \vee 0 = A \qquad A \vee 1 = 1$$

10. Законы поглощения.

$$A \& (A \vee B) = A$$

$$A \vee (A \& B) = A$$

Справедливость законов можно доказать построением таблиц истинности.

Применим законы на практике.

Пример 1. Упростить логическое выражение: $A \& B \& C \vee A \& B \& C$.

По распределительному закону можно получить: $A \& B \& (C \vee C)$.

Закон исключения третьего позволит упростить выражение в скобках: $A \& B \& (1)$.

Уберём скобки в выражении по сочетательному закону: $A \& B \& 1$.

Закон работы с константами ($A \& 1 = A$) разрешает избавиться от 1: $A \& B$.

Пример 2. Упростить логическое выражение: (A v B) & (A v B v C) & (A v B v C).
(A v B) & (A v B v C) & (A v B v C) = (A v B) & (0 v C v C) = (A v B) & 1 = A v B.

Домашнее задание:

1. Перечислите по порядку закону которые были применены для упрощения выражения во втором примере.
2. Упростите выражение: $(A \vee B \& \overline{C}) \& (A \& B \& C \vee A \& B)$