Информатика

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

10 класс

ИЗДАТЕЛЬСТВО БИНОМ

Понятие множества

Множество — совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как единое целое.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 …

Способы задания множества

Перечисление всех элементов множества	Словесное описание множества
M = {1, 3, 5, 7, 9}	множество однозначных нечетных чисел
$A = \{x \mid 10 \leq x < 100\}$	множество целых двузначных чисел
B = {0, 1}	цифры двоичного алфавита
C = {А, Е, Ё, И, О, У, Ы, Э, Ю, Я}	гласные буквы русского алфавита

Какие множества можно задавать перечислением всех элементов?

Стандартные обозначения

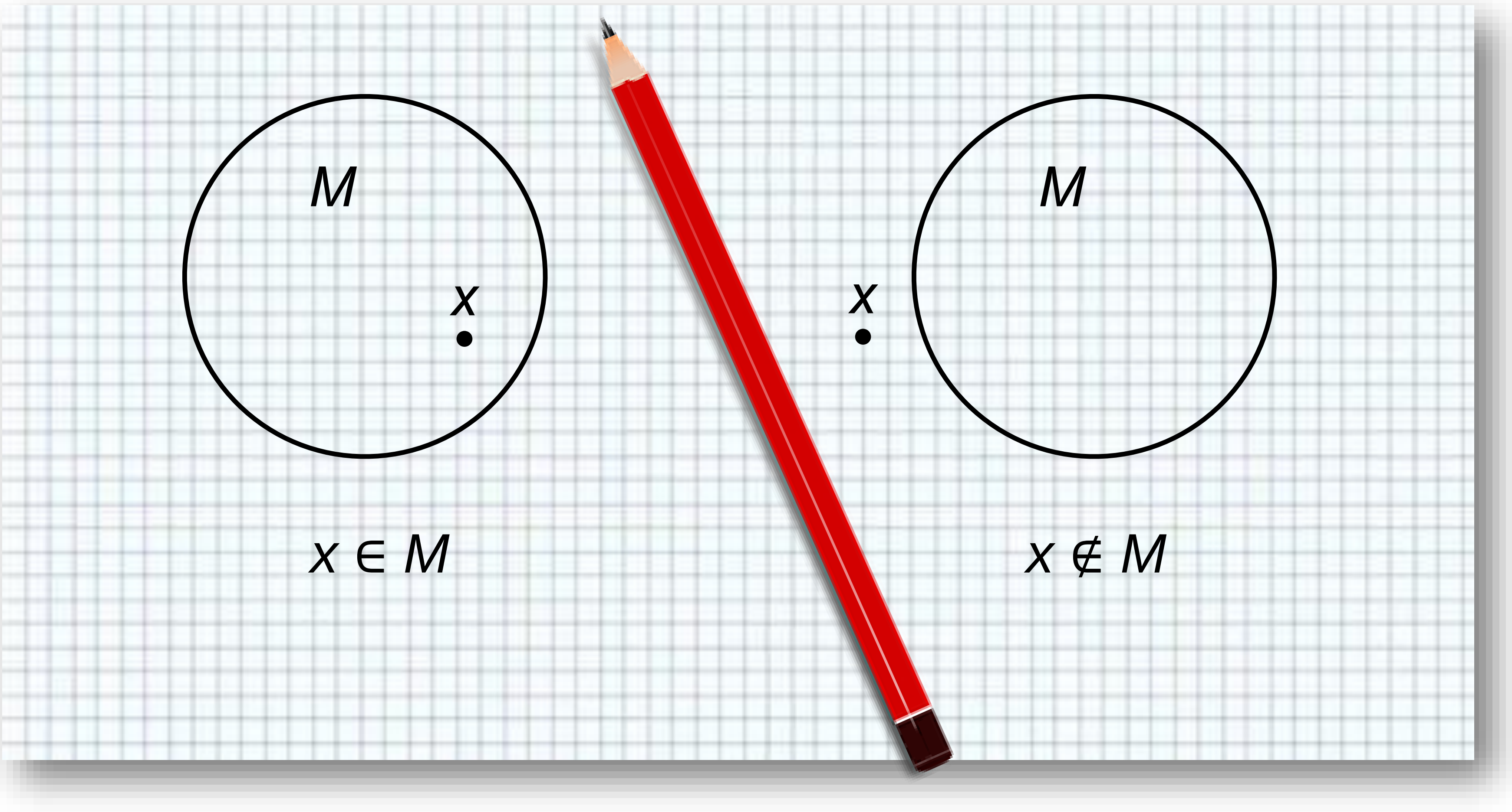
Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита (A, B, C, …). Объекты, входящие в состав множества, называются его *элементами* и обозначаются строчными латинскими буквами.

Описание	Обозначение
x - элемент множества M (x принадлежит множеству M)	$x \in M$
x не является элементом множества M (x не принадлежит M)	$x \notin M$
мощность (количество элементов) множества M	$\lvert M \rvert$
пустое множество – множество, в котором нет ни одного элемента	$\emptyset$

Круги Эйлера

Для наглядного изображения множеств используются круги Эйлера.

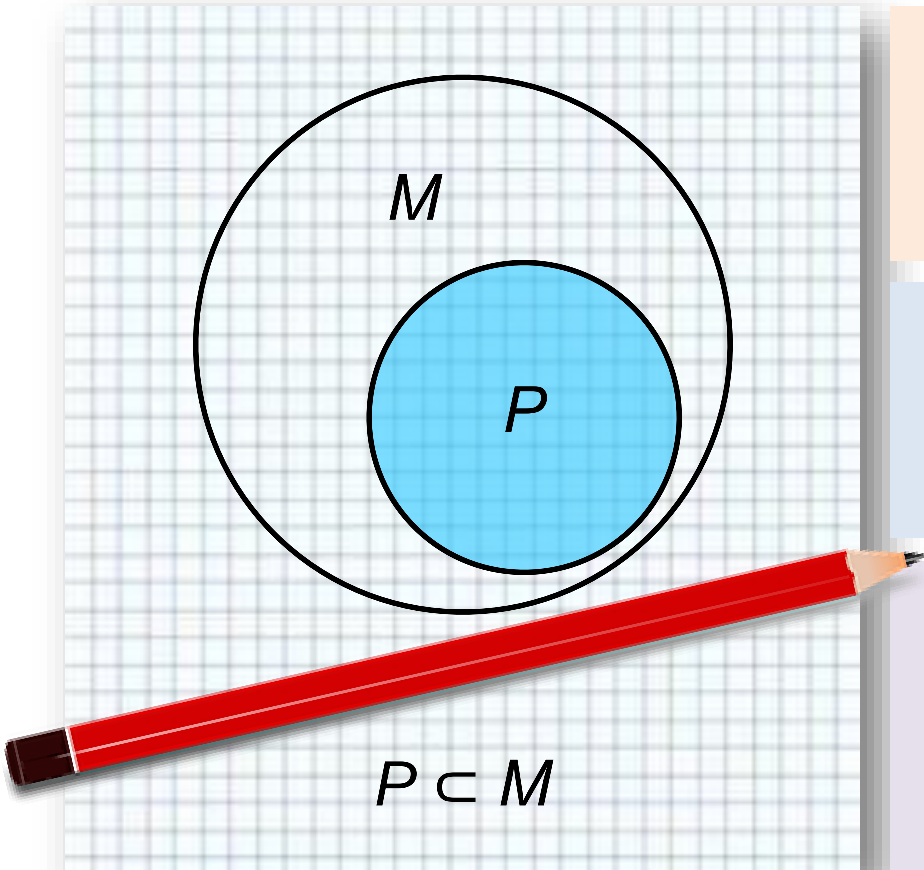
Точки внутри круга считаются элементами множества.



Подмножество

Если каждый элемент множества P принадлежит множеству M, то говорят, что P есть **подмножество** M, и записывают:

$$P \subset M$$



Само множество M является своим подмножеством:

$$M \subset M$$

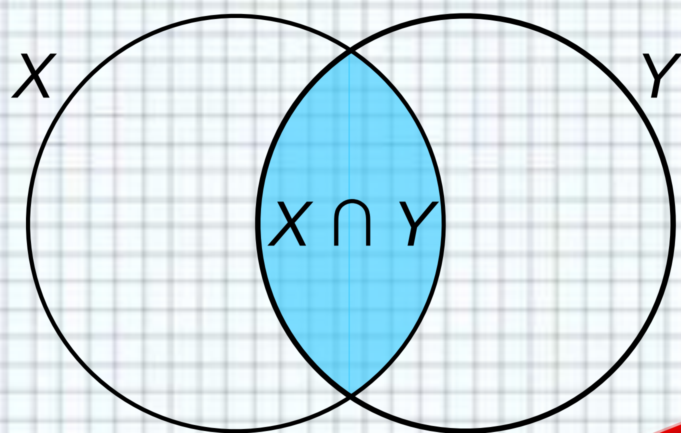
Пустое множество является подмножеством M:

$$\emptyset \subset M$$

Универсальное множество содержит все возможные подмножества одной природы. Обозначается буквой U.

Пересечение множеств

Пересечением двух множеств X и Y называется множество их общих элементов. Обозначается $X \cap Y$.



$X \cap Y$

Множества M и X не имеют общих элементов:

$M \cap X = \emptyset$

P подмножество множества M:

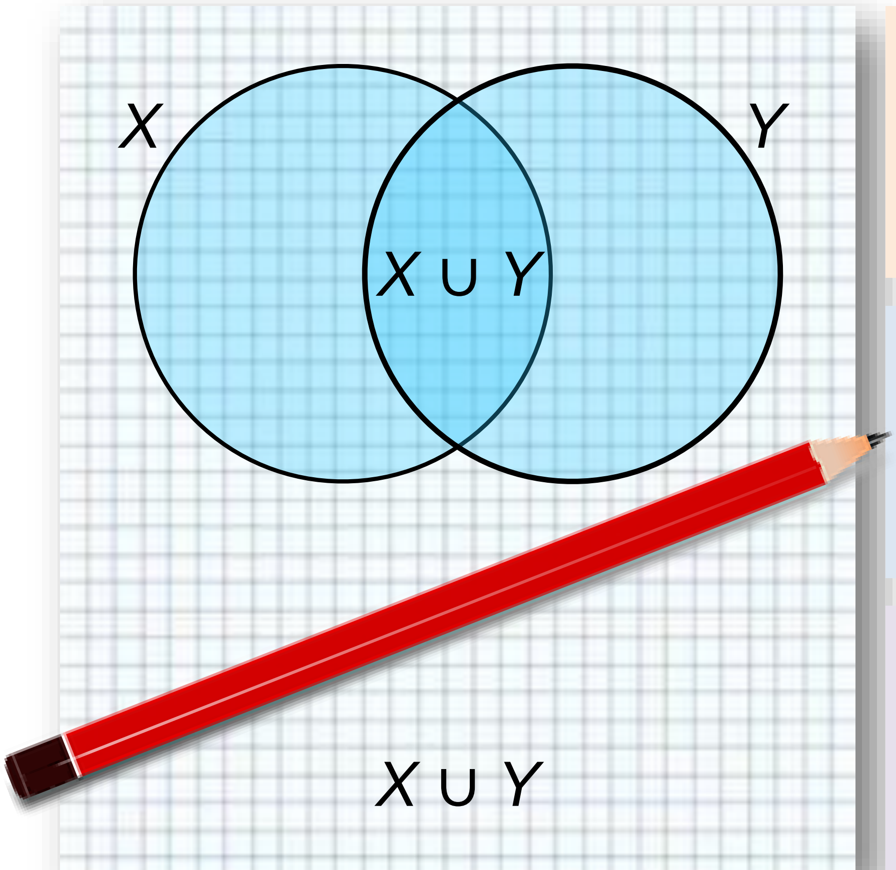
$M \cap P = P$

Пересечение множеств M и M:

$M \cap M = M$

Объединение множеств

Объединением двух множеств X и Y называется множество, состоящее из всех элементов этих множеств и не содержащее никаких других элементов ($X \cup Y$).



$M \cup \varnothing = M$

P подмножество множества M:
$M \cup P = M$

Объединение множеств M и M:
$M \cup M = M$

Примеры пересечения и объединения множеств

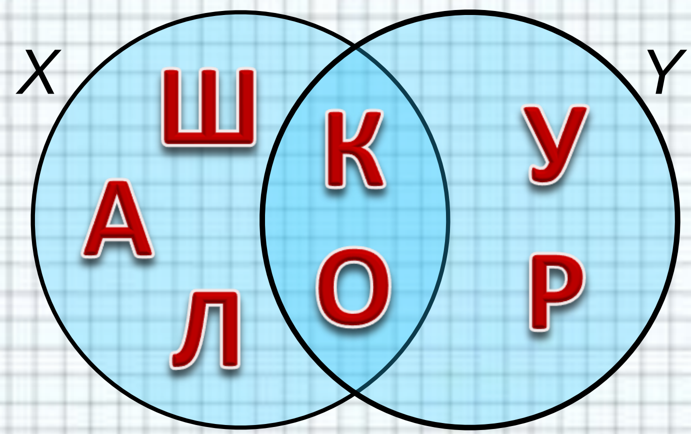
$X = \{Ш, К, О, Л, А\}$

$Y = \{У, Р, О, К\}$

$X \cap Y = \{К, О\}$

$X = \{Ш, К, О, Л, А\}$

$Y = \{У, Р, О, К\}$

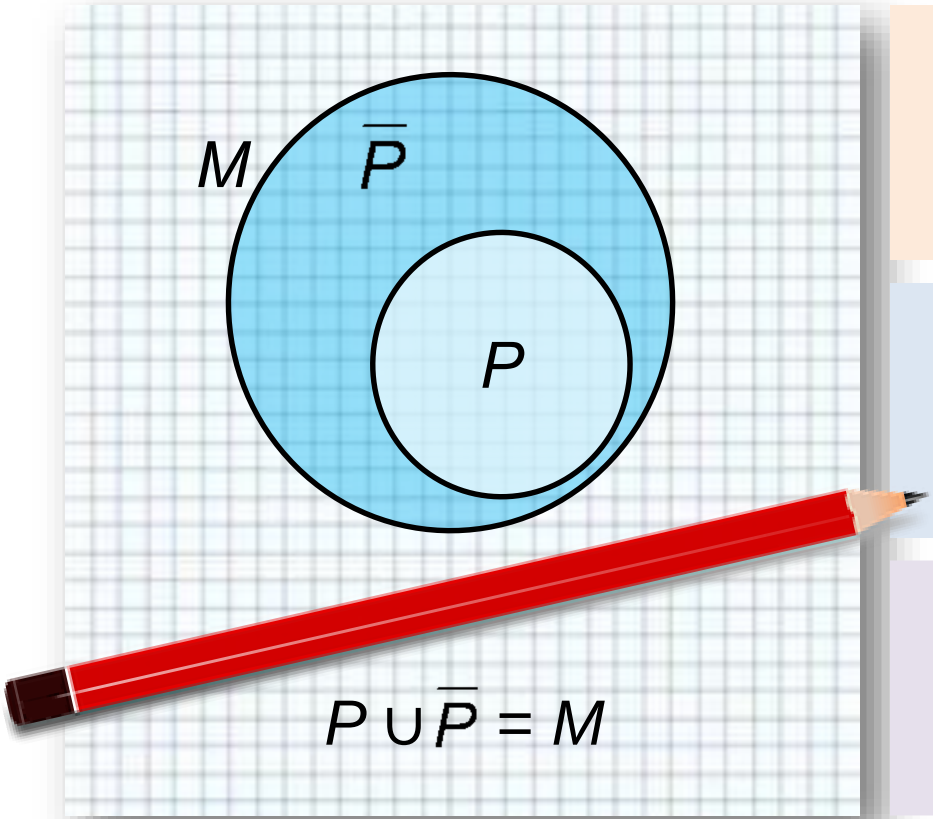


$X \cup Y = \{Ш, К, О, Л, А, У, Р\}$

Возможно ли равенство: $A \cup B = A \cap B$?

Дополнение множества

Пусть множество P является *подмножеством* множества M. **Дополнением** P до M называется множество, состоящее из тех элементов M, которые не вошли в P. Обозначается $\overline{P}$ или P'.



Дополнение M до M:

$M' = \emptyset$

Дополнение пустого множества до M:

$\emptyset' = M$

Дополнение множества М до универсального:

$M \cup M' = U$

Мощность множества

Мощностью конечного множества называется число его элементов.

Мощность множества X обозначается $|X|$.

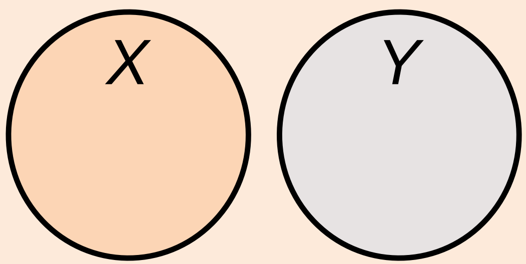
Множество	Мощность
пустое множество	$\|\varnothing\| = 0$
A - множество букв русского алфавита	$\|A\| = 33$
B = {зима, весна, лето, осень}	$\|B\| = 4$

Мощность любого *конечного* множества равно количеству элементов данного множества.

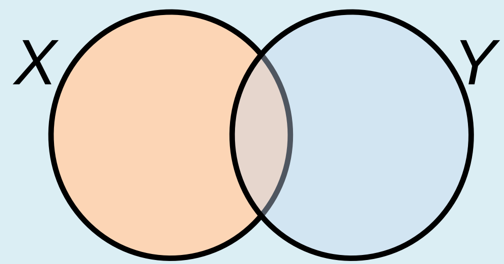
Два множества являются **равномощными**, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Формула включений-исключений

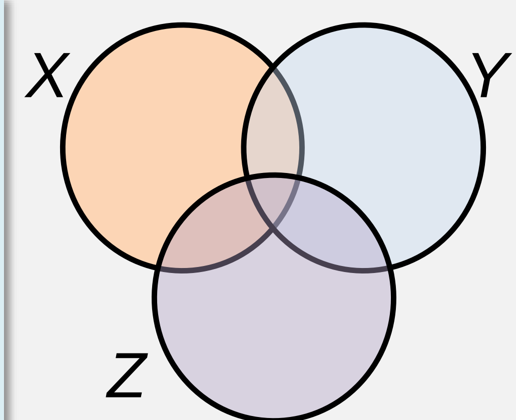
Принципом включений-исключений называется формула, позволяющая вычислить мощность объединения (пересечения) множеств, если известны их мощности и мощности всех их пересечений (объединений).



$|X \cup Y| = |X| + |Y|$



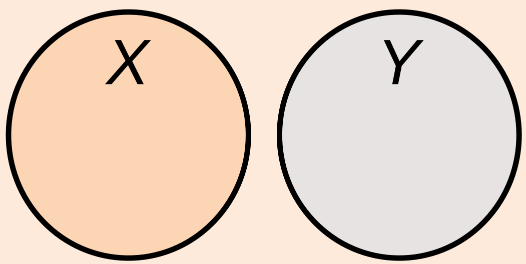
$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$

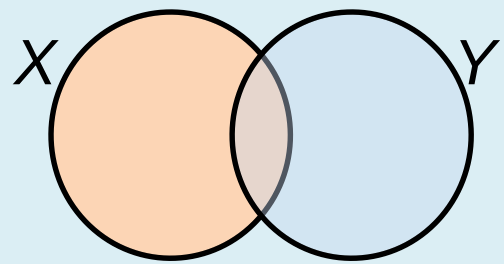


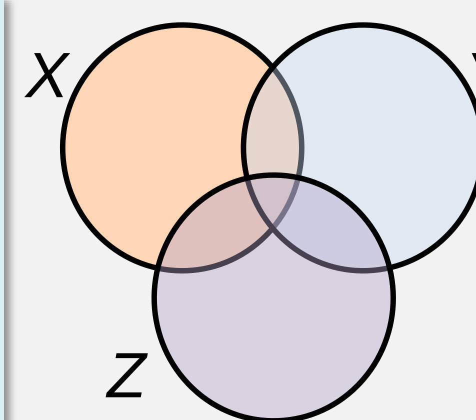
$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$

Формула включений-исключений

Принципом включений-исключений называется формула, позволяющая вычислить мощность объединения (пересечения) множеств, если известны их мощности и мощности всех их пересечений (объединений).







$|X \cap Y| = 0$

$|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y|$

$|X \cap Y \cap Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cup Y| - |X \cup Z| - |Y \cup Z| + |X \cup Y \cup Z|$

Вопросы и задания

Сколько натуральных чисел от *1* до *1000* включительно делятся на 3 или на 5, или на 7?

Решение:

1) [1000:3] = 333 чисел делятся на 3
2) [1000:5] = 200 чисел делятся на 5
3) [1000:7] = 142 числа делятся на 7
4) [1000:(3·5)] = 66 чисел делятся на 3 и 5
5) [1000:(3·7)] = 47 чисел делятся на 3 и 7
6) [1000:(5·7)] = 28 чисел делятся на 5 и 7
7) [1000:(3·5·7)] = 9 чисел делятся на 3, 5 и 7
8) По формуле включений-исключений
   $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$
   получаем: 333 + 200 +142 – 66 – 47 – 28 + 9 = 543

Ответ: *543 числа*

Вопросы и задания

В зимний лагерь отправляется 100 старшеклассников. Почти все они увлекаются сноубордом, коньками или лыжами. При этом многие из них занимаются несколькими видами спорта. Всего кататься на сноуборде умеют 30 ребят, на лыжах — 28, на коньках — 42. Умением кататься на лыжах и сноуборде могут похвастаться 8 ребят, на лыжах и коньках — 10, на сноуборде и коньках — 5, но только трое из них владеют всеми тремя видами спорта. Сколько ребят не умеет кататься ни на сноуборде, ни на лыжах, ни на коньках?

Решение:

Обозначим через *S*, *L* и *K* множество сноубордистов, лыжников и любителей коньков соответственно. Тогда:

$|S \cup L \cup K| = |S| + |L| + |K| - |S \cap L| - |S \cap K| - |L \cap K| + |S \cap L \cap K| =$

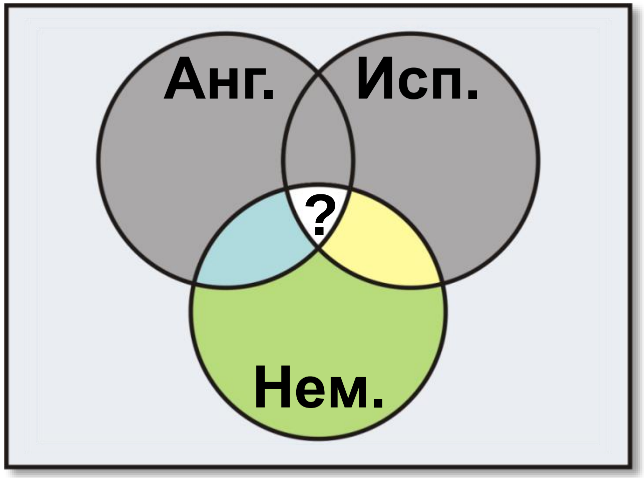
$= 30 + 28 + 42 - 8 - 5 - 10 + 3 = 80 \quad \Rightarrow \quad 100 - 80 = 20$

Ответ: 20 старшеклассников

Вопросы и задания

Из *100* человек *85* знают английский язык, *80* - испанский, *75* - немецкий. *Каждый владеет хотя бы одним языком*. Сколько человек знают все три языка? Укажите множество решений.

Решение (один из способов):



1. 100 - 85 = 15 (чел.) – не знают английского
2. 100 - 80 = 20 (чел.) – не знают испанского
3. 100 - 75 = 25 (чел.) – не знают немецкого

4. 15 + 20 +25 = 60 (чел.) – могут знать два языка
5. 100 - 60 = 40 (чел.) – знают три языка

или

4. (15 + 20 +25) : 2 = 30 (чел.) – могут знать только один язык
5. 100 - 30 = 70 (чел.) – знают три языка

Ответ: от *40 до 70 человек включительно*

Самое главное

Множество — это совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как единое целое.

Пересечением двух множеств X и Y называется множество их общих элементов.

Объединением двух множеств X и Y называется множество, состоящее из всех элементов этих множеств и не содержащее никаких других элементов.

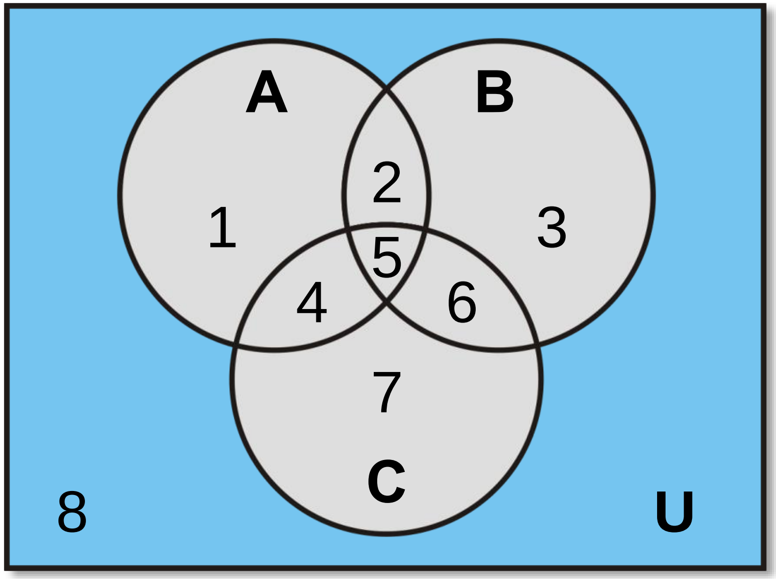
Пусть множество P является подмножеством множества M. **Дополнением** P до M называется множество, состоящее из тех элементов M, которые не вошли в P.

Мощностью конечного множества называется число его элементов.

Домашнее задание

Решить письменно

1. Пусть *A*, *B* и *C* - некоторые множества, обозначенные кругами, *U* - универсальное множество. С помощью операций объединения, пересечения и дополнения до универсального множества выразите через *A*, *B* и *C* следующие множества:



1) 1 ∪ 2 ∪ 3 ∪ 4 ∪ 5 ∪ 6

2) 2 ∪ 5

3) 5

4) 2 ∪ 4 ∪ 5 ∪ 6

5) 1 ∪ 2 ∪ 3

6) 8