Элементы алгебры логики

Алгебра логики – раздел математики, изучающий *высказывания*, рассматриваемые с точки зрения их логических значений (истинности или ложности), и логические операции над ними.

В 1938 году Клод Шеннон применил алгебру логики для описания процесса функционирования релейно-контактных и электронно-ламповых схем.

Высказывание – это предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно (истина — 1, ложь — 0).

Логическая переменная – это переменная, которая обозначает любое высказывание и может принимать логические значения «истина» или «ложь».

Пример:

Выражение: a > 5, a – переменная. Если a будет равно от 6 и выше, то это логическое выражение истинно (равно логической 1), иначе – ложно (логический 0).

Составное логическое высказывание можно представить в виде логического выражения (формулы), состоящего из логических констант (0, 1), логических переменных, знаков логических операций и скобок.

Логические операции:

Логическая операция **КОНЪЮНКЦИЯ** (*логическое умножение* обозначается & или ^) определяет соединение двух логических выражений (высказываний) с помощью союза **И**.

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логическая операция **ДИЗЪЮНКЦИЯ** (*логическое сложение* обозначается v) определяет логическое соединение двух логических выражений (высказываний) с помощью союза **ИЛИ**.

A	B	AvB
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Логическая операция **ОТРИЦАНИЕ,** или **ИНВЕРСИЯ** (обозначается ¬ или надчеркиванием), определяется над **одним** аргументом следующим образом: если исходное выражение истинно, то результат его отрицания будет ложным, и наоборот.

A	¬A
0	1
1	0

Логическая операция **ИМПЛИКАЦИЯ** (логическое следование, обозначается =>), связывает два логических выражения, из которых первое является условием, а второе – следствием из этого условия.

A	B	A=>B
0	0	1
0	1	1
1	0	0

1	1	1

Разложение операции импликации: A=>B = ¬AvB

Логическая операция **ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ** (равнозначность, обозначается <=>), определяет результат сравнения двух логических выражений A и B.

A	**B**	**A<=> B**
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Разложение операции импликации: A<=>B = (¬A^¬B)v(A^B)

Порядок выполнения операций в составных логических выражениях (при отсутствии скобок)**:**

1. Инверсия (¬);
2. Конъюнкция (^);
3. Дизъюнкция (v);
4. Импликация (=>);
5. Эквивалентность (<=>).

3 2 1

Задача: Решить составное логическое выражение: D= ¬(AvB^C)

Решить составное логическое выражение означает составить таблицу истинности.

1. Расставим порядок действий: D= ¬(AvB^C)
2. Определим количество переменных величин в выражении: переменных 3 (A, B, C).
3. Посчитаем количество столбцов и строк в таблице:
   a) количество столбцов = кол-во переменных + кол-во действий = 3 + 3 = 6 (столбцов)
   b) количество строк = 2^n, n – кол-во переменных. $2^n = 2^3 = 8$ (строк). Первая строка (с заголовками) при вычислении не учитывается.
4. Строим таблицу, заполняем первую строку и перечислим все возможные варианты для трёх переменных:

A	**B**	**C**	**1**	**2**	**3**
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

5. Первое действие (B^C) – конъюнкция (логическое умножение). Значение столбца B умножаем на значение столбца C.

A	**B**	**C**	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0		
0	0	1	0		
0	1	0	0		
0	1	1	1		
1	0	0	0		
1	0	1	0		
1	1	0	0		
1	1	1	1		

6. Вторым действием (AvB^C) выполняется дизъюнкция (логическое сложение) между столбцом A и результатом конъюнкции. Значение столбца A складываем со значением столбца 1.

A	**B**	**C**	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	
0	1	0	0	0	
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	
1	1	0	0	1	
1	1	1	1	1	

7. Последнее действие (¬(AvB^C)) – инверсия (логическое отрицание), применяемая ко всему выражению. Значение столбца 2 меняем на противоположные.

A	**B**	**C**	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0

Домашнее задание: Решить составное логическое выражение: F = A ^ C v C v ¬(A ^ B).