Информатика

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

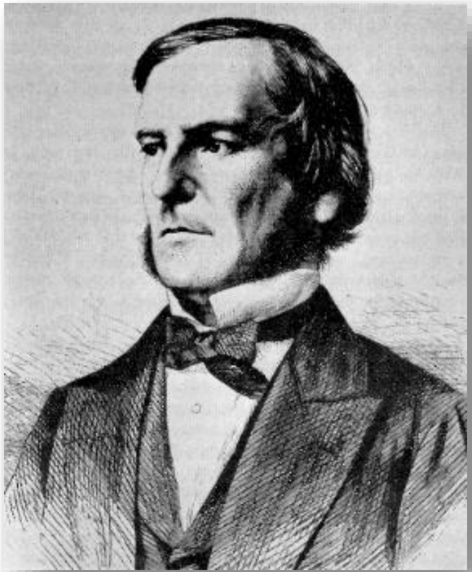
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

10 класс

ИЗДАТЕЛЬСТВО БИНОМ

Алгебра логики

Алгебра логики – раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые с точки зрения их логических значений (истинности или ложности), и логические операции над ними.



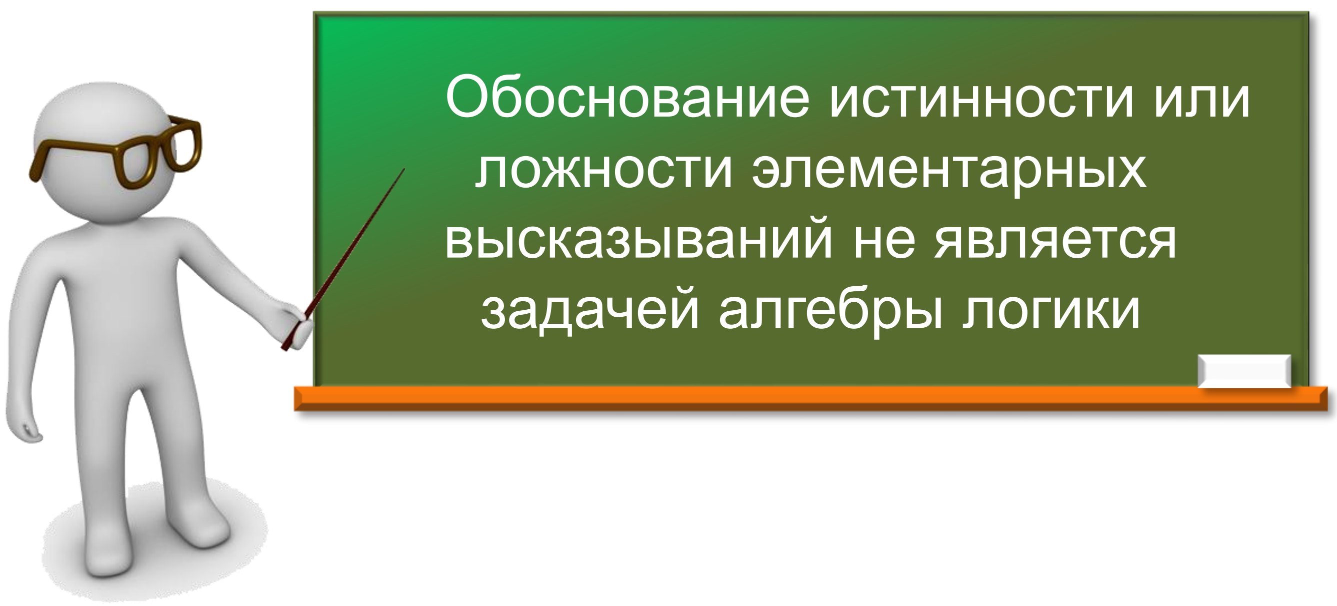
Джордж Буль (1815-1864) – английский математик, основоположник алгебры логики. Изучал логику мышления математическими методами и разработал алгебраические методы решения традиционных логических задач. Долгое время алгебра логики была известна достаточно узкому классу специалистов.

В 1938 году Клод Шеннон применил алгебру логики для описания процесса функционирования релейно-контактных и электронно-ламповых схем.

Высказывания и переменные

Высказывание – это предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно.

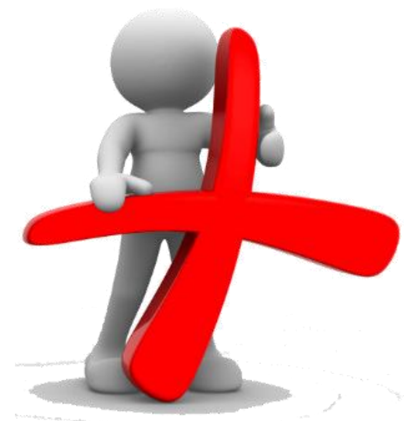
Высказывания, образованные из других высказываний, называются **составными**. Высказывание, никакая часть которого не является высказыванием, называется **элементарным**.



Высказывания и переменные

Логическая переменная – это переменная, которая обозначает любое высказывание и может принимать логические значения «истина» или «ложь».

Истина	Ложь
И	Л
true	false
да	нет
1	0



Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности образующих их высказываний и определённой трактовки связок (логических операций над высказываниями).

Логические операции

Конъюнкция

Логическое умножение

A	B	A и B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Высказывание истинно тогда и только тогда, когда истинны оба исходных высказывания.

Дизъюнкция

Логическое сложение

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Высказывание ложно тогда и только тогда, когда ложны оба исходных высказывания.

Отрицание

Инверсия

A	не A
0	1
1	0

Высказыванию ставится в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному.

Логические операции

Импликация

Следование

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ложно тогда и только тогда, когда посылка (первое) истинна, а следствие (второе) ложно.

Пример высказывания:

Если верно списали пример, то получили верный ответ.

A: Пример списали верно

B: Получили верный ответ

В высказывании нет информации о правильности самого решения. Анализировать можно только то, что сказано в высказывании.

Если списали неверно, то ответ может быть любым.

Из ложной посылки можно получить истинное и ложное высказывание, из истинного только истинное.

Логические операции

Строгая дизъюнкция

Исключающая дизъюнкция

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Высказывание истинно тогда, когда только одно из двух исходных выска-зываний истинно.

Пример высказывания:

Сегодня мы пойдем либо в театр, либо в кино.

A: Мы пойдем в театр

B: Мы пойдем в кино

Невозможно отправиться в кино и в театр одновременно.

Но если не пойти в театр и не пойти в кино, высказывание будет ложным.

Логические операции

Эквиваленция

Равнозначность

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Высказывание истинно тогда, когда оба исходных высказывания истинны или оба исходных высказывания ложны.

Пример высказывания:

Аттестат об образовании выдается тогда и только тогда, когда выпускник успешно проходит государственную итоговую аттестацию.

A: Выдается аттестат

B: Успешное прохождение аттестации

Два события взаимосвязаны. Получение аттестата без успешного прохождения процедуры ЕГЭ невозможно, как невозможно и обратное.

$$A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}$$

Обозначения логических операций

Операция	Обозначение	Речевой оборот
Отрицание, инверсия, лог. НЕ)	$\neg A$, $\overline{A}$, not A, не A	«Не», «не верно, что»
Конъюнкция (лог. умножение, лог. И)	$A \wedge B$, A&B, $A \cdot B$, AB, A и B, A and B	«И», «как …, так и», «вместе с», «но», «хотя»
Дизъюнкция (лог. сложение, лог. ИЛИ)	$A \vee B$, $A + B$, $A \mid B$, A ИЛИ B, A or B	«Или», «или …, или …, или оба вместе»
Строгая дизъюнкция (искл. дизъюнкция, искл. ИЛИ)	$A \oplus B$, A xor B	«Либо …, либо», «только … или только»
Импликация (лог. следование)	$A \rightarrow B$, $A \Rightarrow B$	«Если …, то», «из … следует», «влечёт»
Эквиваленция (эквивалентность, равнозначность)	$A \leftrightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$, $A \equiv B$	«Эквивалентно», «необходимо и достаточно»

Обозначения логических операций

Операция	Обозначение	Речевой оборот
Отрицание, инверсия, лог. НЕ)	¬A, $\overline{A}$, not A, не A	«Н… не вер…
Конъюнкция (лог. умножение, лог. И)	A ∧ B, A&B, A · B, AB, A и B, A and B	«… «вм…
Дизъюнкция (лог. сложение, лог. ИЛИ)	A ∨ B, A + B, A | B, A ИЛИ B, A or B	«И…
Строгая дизъюнкция (искл. дизъюнкция, искл. ИЛИ)	A ⊕ B, A xor B	«Ли…
Импликация (лог. следование)	A → B, A ⇒ B	«… следует», «влечёт»
Эквиваленция (эквивалентность, равнозначность)	A ↔ B, A ⇔ B, A ≡ B	«Эквивалентно», «необходимо и достаточно»

Инструкция ЕГЭ

В экзаменационных заданиях используются следующие соглашения.

1. Обозначения для логических связок (операций):
a) *отрицание* (инверсия, логическое НЕ) обозначается ¬ (например, ¬A);
b) *конъюнкция* (логическое умножение, логическое И) обозначается ∧ (например, A ∧ B) либо & (например, A & B);
c) *дизъюнкция* (логическое сложение, логическое ИЛИ) обозначается ∨ (например, A ∨ B) либо | (например, A | B);
d) *следование* (импликация) обозначается → (например, A → B);
e) *тождество* обозначается ≡ (например, A ≡ B). Выражение A ≡ B истинно тогда и только тогда, когда значения A и B совпадают (либо они оба истинны, либо они оба ложны);
f) символ 1 используется для обозначения истины (истинного высказывания); символ 0 – для обозначения лжи (ложного высказывания).

2. Два логических выражения, содержащих переменные, называются *равносильными* (эквивалентными), если значения этих выражений совпадают при любых значениях переменных. Так, выражения A → B и (¬A) ∨ B равносильны, а A ∨ B и A ∧ B неравносильны (значения выражений разные, например, при A = 1, B = 0).

3. Приоритеты логических операций: инверсия (отрицание), конъюнкция (логическое умножение), дизъюнкция (логическое сложение), импликация (следование), тождество. Таким образом, ¬A ∧ B ∨ C ∧ D означает то же, что и ((¬A) ∧ B) ∨ (C ∧ D).
Возможна запись A ∧ B ∧ C вместо (A ∧ B) ∧ C. То же относится и к дизъюнкции: возможна запись A ∨ B ∨ C вместо (A ∨ B) ∨ C.

4. Обозначения Мбайт и Кбайт используются в традиционном для информатики смысле – как обозначения единиц измерения, чьё соотношение с единицей «байт» выражается степенью двойки.

Логические выражения

Составное логическое высказывание можно представить в виде логического выражения (формулы), состоящего из логических констант (0, 1), логических переменных, знаков логических операций и скобок.

Для логического выражения справедливо:

- всякая логическая переменная, а также логические константы (0, 1), есть логическое выражение
- если *A* – логическое выражение, то и $\overline{A}$ – логическое выражение
- если *A* и *B* – выражения, то связанные любой бинарной операцией они также представляют собой логическое выражение

Приоритет	Не	И	Или Либо	Следует Равносильно

Логические выражения

Задание 1. Проверить, удовлетворяет ли слово ***ОКНО*** логическому условию:

если первая буква гласная или вторая гласная, но не обе вместе, то из того, что последняя буква согласная, следует, что предпоследняя буква гласная.

Решение: Введем условные обозначения:

A_1 - первая буква гласная,

A_n - последняя буква гласная,

$\overline{A_1}$ означает, что первая буква согласная.

A_1	A_2	A_{n-1}	A_n
О	К	Н	О
1	0	0	1

Запишем условие задачи на языке формальной логики:

$$A_1 \oplus A_2 \longrightarrow (\overline{A_n} \longrightarrow A_{n-1})$$

Выполним вычисления.

$$1 \oplus 0 \longrightarrow (\overline{1} \longrightarrow 0)$$

$$1 \longrightarrow (0 \longrightarrow 0)$$

$$1 \longrightarrow 1$$

$$1$$

Ответ: Да

Логические выражения

Задание 2. Приведите пример слова, которое НЕ удовлетворяет логическому условию:

если первая буква гласная или вторая гласная, но не обе вместе, то из того, что последняя буква согласная, следует, что предпоследняя буква гласная.

Решение: Введем условные обозначения:

A_1 - первая буква гласная,

A_n - последняя буква гласная,

$\overline{A_1}$ означает, что первая буква согласная.

Запишем условие задачи на языке формальной логики:

$$A_1 \oplus A_2 \longrightarrow (\overline{A_n} \longrightarrow A_{n-1})$$

Выполним преобразования, разбирая выражение с конца.

A_1	A_2	A_{n-1}	A_n
Р	О	С	Т
1	0	0	0

$$1 \oplus 0 \longrightarrow (\overline{0} \longrightarrow 0)$$

$$1 \longrightarrow (1 \longrightarrow 0)$$

$$1 \longrightarrow 0$$

$$0$$

Ответ: РОСТ

Логические выражения

Задание 3. Сколько решений имеет логическое уравнение:

$$(x_1 \to x_2) \vee (x_3 \equiv x_4) = 1$$

Решение: Введем замену переменных

$$\begin{matrix} t_1 = x_1 \to x_2 \\ t_2 = x_3 \equiv x_4 \end{matrix} \Longrightarrow t_1 \vee t_2 = 1$$

Заполним таблицу всеми возможными вариантами:

	0	1
$t_1 = x_1 \to x_2$	10	$00, 01, 11$
$t_2 = x_3 \equiv x_4$	$01, 10$	$00, 11$

Вариант когда $t_1=0$ и $t_2=0$ исключаем, т.к. будет нарушено условие задачи ($t_1 \vee t_2 = 1$; $0 \vee 0 = 0$). Остальные варианты удовлетворяют условию.

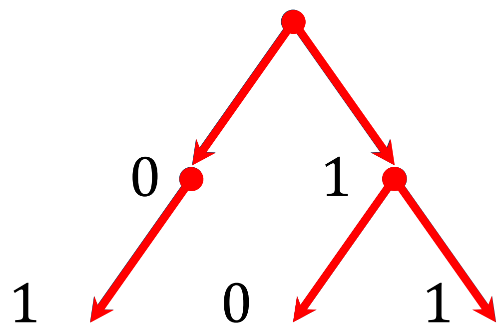
Логические выражения

Задание 3. Сколько решений имеет логическое уравнение:

$$(x_1 \rightarrow x_2) \vee (x_3 \equiv x_4) = 1$$

Решение: Введем замену переменных

$$\begin{matrix} t_1 = x_1 \rightarrow x_2 \\ t_2 = x_3 \equiv x_4 \end{matrix} \Longrightarrow t_1 \vee t_2 = 1$$



	0	1
$t_1 = x_1 \rightarrow x_2$	10	00, 01, 11
$t_2 = x_3 \equiv x_4$	01, 10	00, 11

Если t_1 = 0 (10), то t2 должно быть равно 1 (00, 11).

Если t_1 = 1 (00, 01, 11), то t2 может быть равно 0 (01, 10) или 1 (00, 11), получаем 2 варианта.

Посчитаем общее количество вариантов по правилу комбинаторики – правилу умножения.

$1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2$ =14

Ответ: 14

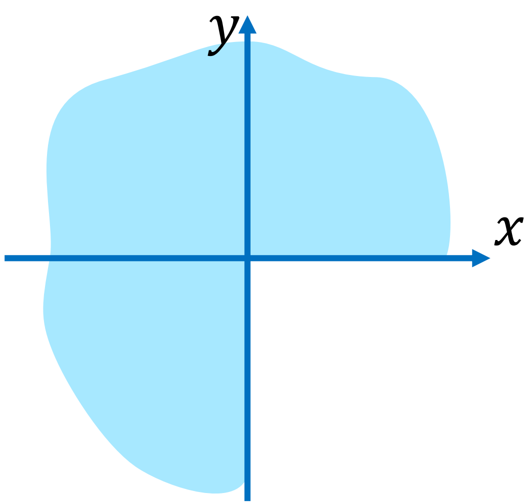
Предикаты и множества истинности

Предикат – это утверждение, содержащее одну или несколько переменных.

Предикаты позволяют задать множество, не перечисляя всех его элементов.

Предикат $P(x) = (x < 0)$ описывает множество отрицательных чисел.

Какое множество на координатной плоскости задает предикат $P(x) = (x \leq 0) \vee (y \geq 0)$?



Ответ

Самое главное

Высказывание – это предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно. Высказывания, образованные из других высказываний, называются составными. Высказывание, никакая часть которого не является высказыванием, называется элементарным.

Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности образующих их высказываний и логических операций над высказываниями.

Логическая операция полностью может быть описана таблицей истинности, указывающей, какие значения принимает составное высказывание при всех возможных значениях образующих его элементарных высказываний.

Самое главное

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

A	B	A&B	A∨B	A→B	A⊕B	A ↔ B
0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1

Приоритет операций: отрицание; конъюнкция; дизъюнкция и строгая дизъюнкция; импликация и эквиваленция.

Операции одного приоритета выполняются в порядке их следования, слева направо. Скобки меняют порядок выполнения операций.

Предикат – это утверждение, содержащее одну или несколько переменных. Из имеющихся предикатов с помощью логических операций можно строить новые предикаты.

Домашнее задание:

1. Вычислить:
   - $(A\&0) \vee 1 = 1$
   - $\overline{A \rightarrow A} \vee 0 = 0$
   - $(1 \oplus 1) \rightarrow A = 1$

2. Сколько решений имеет логическое уравнение:

$$(x_1 \equiv x_2)\&(x_3 \oplus x_4)\&(x_5 \vee x_6) = 1$$